Computabilidade em sistemas dinâmicos

Daniel da Silva Graça[1,2]

[1]DM/FCT, Universidade do Algarve, Portugal
[2]SQIG, Instituto de Telecomunicações, Portugal

30 de Julho de 2009

Introdução

Informalmente um sistema dinâmico é um modelo matemático em que o estado presente determina os estados futuros

Exemplos:

- A órbita dos planetas segundo a física newtoniana
- A vasta maioria dos modelos para circuitos electrónicos
- Modelos de previsão do tempo
- ...

Na realidade os sistemas dinâmicos aplicam-se a tantas situações que o seu comportamento tende a ser muito complexo e extremamente difícil de analisar

Computadores & Sistemas Dinâmicos

Desde a sua aparição que os computadores têm sido utilizados para estudar sistemas dinâmicos:

- Os primeiros computadores analógicos foram usados em aplicações práticas modeladas por sistemas dinâmicos como artilharia, desenvolvimento de aviões, etc.
- A simulação de sistemas dinâmicos tornou-se cada vez mais frequente com o aparecimento de computadores digitais rápidos e baratos
- Foram fundamentais na introdução de conceitos teóricos revolucionários como a teoria do caos

Teoria da computação

A máquina de Turing é o modelo teórico de um computador digital (tese de Church-Turing)

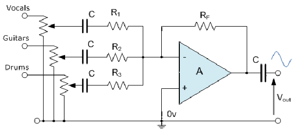
- Há problemas que não podem ser resolvidos por meio de máquinas de Turing (problema da paragem, 10º problema de Hilbert, etc.) — teoria da computabilidade
- Dos problemas que podem ser resolvidos por máquinas de Turing, há os que se resolvem rapidamente e outros que na prática demoram demasiado tempo a serem resolvidos — teoria da complexidade computacional

Objectivo

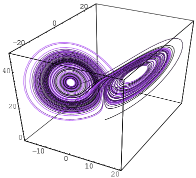
Compreender modelos de computação sobre os reais, com ênfase na sua relação com sistemas dinâmicos contínuos

Motivações

- Modelos de computação
  - Computadores analógicos $\geq$ computadores digitais do ponto de vista da computabilidade/complexidade?
- Verificação e teoria do controlo
  - Pode-se simular fielmente um sistema dinâmico contínuo com computadores?



Electrónica analógica: um misturador áudio



Determinar atractores: o modelo meteorológico de Lorenz

Dificuldades

- Várias abordagens:

Modelos de computação sobre os reais

Tempo contínuo: GPAC de Shannon, sistemas híbridos, máquinas de sinais, ...

Tempo discreto: BSS, redes neuronais, ...

Outros: Análise computável, funções recursivas sobre os reais, ...

Novos modelos de computação: computação quântica, autómatos celulares, ...

- Não existe uma relação clara entre os vários modelos
- Não existe uma teoria que abranja todos estes modelos

Metodologia: Modelos de computação sobre os reais

- Estudar o poder computacional
  - Computabilidade, complexidade
  - Comparar modelos uns com os outros (tese de Church-Turing?)
  - Introduzir noções de robustez (queremos ser o mais realístico possível...)
  - Modelos de computação alternativos à máquina de Turing
- Verificação & teoria do controlo
  - Decidir propriedades sobre sistemas dinâmicos contínuos
  - Calcular domínios de atracção, conjuntos invariantes, etc.

Modelos analógicos são equivalentes a equações diferenciais polinomiais

- Melhoramos o modelo GPAC de C. Shannon e sua caracterização; propôs-se correcções com um modelo mais robusto *(J. Complexity 2003)*
- *(Math. Log. Quat. 2004)*

funções GPAC-computáveis	$\Leftrightarrow$	Soluções de $\overrightarrow{y}' = \overrightarrow{p}(t, \overrightarrow{y})$

- As funções GPAC-computáveis são fechadas para a adição, composição, derivação, operadores de integração, etc. *(Adv. Appl. Math. 2008)*

Modelos analógicos e digitais são equivalentes

- Equações diferenciais analíticas podem simular de forma robusta máquinas de Turing *(Adv. Appl. Math. 2008)*

- Em domínios compactos: *(J. complexity 2007)*

GPAC-computável $\Longleftrightarrow$ Análise computável

Em sistemas dinâmicos: complexidade $\simeq$ computabilidade

No plano $\mathbb{R}^2$ *(Unconventional Computation 2009)*:

- Os atractores hiperbólicos (pontos fixos, ciclos limite) são computáveis
- Para sistemas estruturalmente estáveis, o operador que calcula o domínio de atracção de um atractor é semi-computável
- Em geral, o operador que calcula o domínio de atracção de um atractor não é semi-computável

Equações diferenciais: unicidade = computabilidade

- Para equações diferenciais, as mesmas condições mínimas garantem: *(J. Univ. Comp. Sci. 2009)*

Unicidade de soluções $\Longleftrightarrow$ Computabilidade das soluções

- O intervalo maximal de existência para a solução é semi-computável... *(Trans. Amer. Math. Soc. 2009)*
- ... Mas não computável, mesmo que a equação diferencial seja analítica *(App. Math. Comp. 2009)*

Perspectivas: Equações diferenciais polinomiais

$\overrightarrow{y}' = \overrightarrow{p}(t, \overrightarrow{y})$ onde $\overrightarrow{p}$ é um vector de polinómios

Porquê começar com este modelo?

- Bem definido
- Realístico (electrónica analógica)
- Existência de relações com vários modelos computacionais

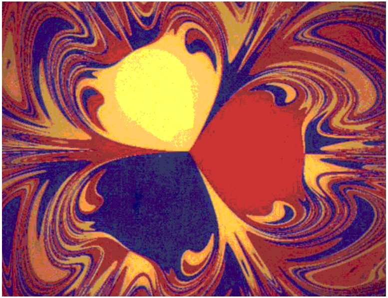
Que tarefas?

- Relaciona-lo com outros modelos (tese de Church-Turing analógica?)
- Introduzir medidas de complexidade (vários problemas a resolver)
- Propriedades de fecho $\Rightarrow$ descrição sintáctica?

Perspectivas: Verificação & teoria do controlo

Sistemas dinâmicos

- Decidir propriedades (atingibilidade, existência de ciclos limite, etc.)
- Computar objectos (domínios de atracção, atractores, etc.)
- Estudar a complexidade computacional em simulações de sistemas dinâmicos contínuos

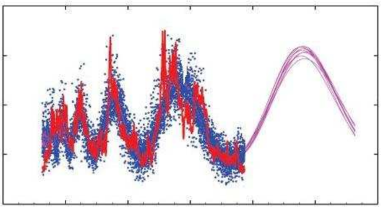


Bacia de atracção de um pêndulo oscilante sobre três magnetos

Perspectivas: Robustez dos modelos

Abordagens

- Estudar o efeito do ruído sobre o processo de computação
- Utilizar modelos probabilísticos de ruído



Obrigado!